ГУАП

Кафедра №3.

Отчёт

Защищён с оценкой отл

Преподаватель

доцент, к.ф.-м.н., доцент
должность, уч. степень, звание | подпись, дата | Ю.Н. Царев

отчёт о лабораторной работе №4

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИКИ

по курсу: ОБЩАЯ ФИЗИКА

Работу выполнила студентка гр.

подпись, дата | инициалы, фамилия

Санкт-Петербург, 2018.

Лабораторная работа №4
Математический и физический маятники

Протокол измерений

Студентка группы № М. В.
Преподаватель Царев Ю. Н.

Параметры приборов

Название прибора	Предел измерений	Цена деления	Класс точности	Системат. погрешность
Секундомер	99,999 с	1 мс	—	0,001 с
Линейка	54 см	0,1 см	—	2 мм

Таблица 1

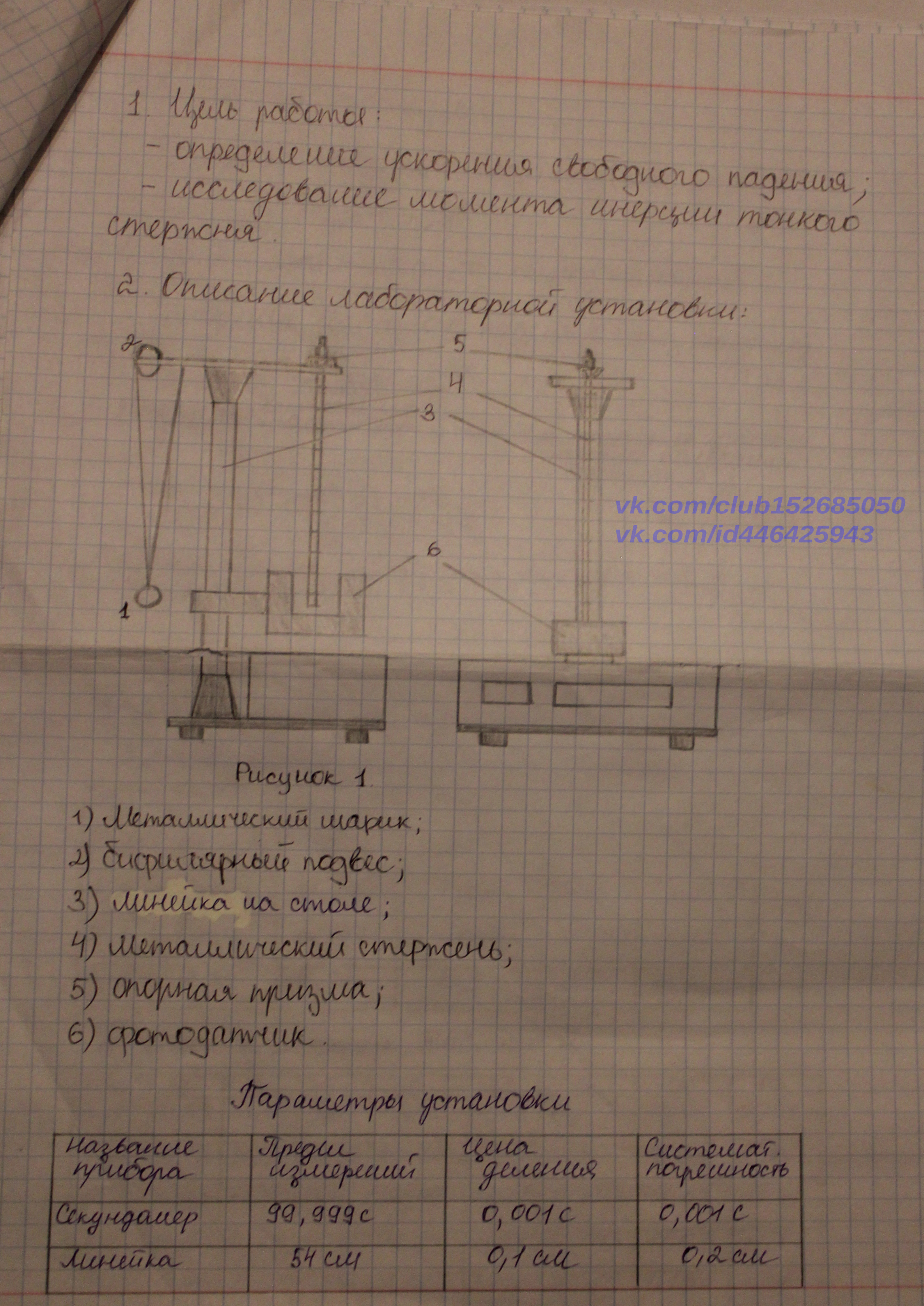
N	1	2	3	4	5
l, см	40	35	30	25	20
t, с	12,62	11,77	10,84	9,96	8,81

Таблица 2

x, см	7	8	9	10	11	12	15	17
t_1, с	11,53	11,51	11,43	11,43	11,41	11,40	11,53	11,81
t_2, с	11,52	11,50	11,42	11,43	11,41	11,40	11,53	11,81
t_3, с	11,52	11,50	11,42	11,43	11,41	11,40	11,53	11,81
$t_{ср}$, с	11,52	11,50	11,42	11,43	11,41	11,40	11,53	11,81

Дата 21.02.18г.

Подпись студента
Подпись преподавателя



1. Цель работы:

- определение ускорения свободного падения;
- исследование момента инерции тонкого стержня.

2. Описание лабораторной установки:

Рисунок 1.

1) Металлический шарик;
2) бифилярный подвес;
3) линейка на столе;
4) Металлический стержень;
5) опорная призма;
6) фотодатчик.

Параметры установки

Название прибора	Предел измерений	Цена деления	Системат. погрешность
Секундомер	99,999 с	0,001 с	0,001 с
Линейка	54 см	0,1 см	0,2 см

3. Рабочие формулы.

Ускорение свободного падения (мат. маятник)

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}, \quad \text{~~где~~} \qquad (1)$$

где l – длина маятника, T – период колебаний.

Ускорение свободного падения (физ маятник)

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T_{min}^2 \sqrt{3}}, \text{ где} \qquad (2)$$

где l – длина ~~маятника~~ всего стержня, T_{min} – минимальное значение периода колебаний (из табл. 2.)

$$Y = \frac{T^2 b}{4\pi^2}, \text{ где} \qquad (3)$$

b – расстояние между центром масс тела и осью подвеса.

4. Результаты измерений и вычислений.

Математический маятник. Таблица 1.

№	1	2	3	4	5
l, см	40	35	30	25	20
t, с	12,62	11,77	10,84	9,96	8,81
T, с	1,262	1,177	1,084	0,996	0,881
g, м/с²	9,9	10,0	10,1	9,9	10,2

Физический маятник. Таблица 2.

x, см	7	8	9	10	11	12	15	17
t_1, с	11,53	11,51	11,43	11,43	11,41	11,40	11,53	11,81
t_2, с	11,52	11,50	11,42	11,43	11,41	11,40	11,53	11,81
t_3, с	11,52	11,50	11,42	11,43	11,41	11,40	11,53	11,81
$t_{ср}$, с	11,52	11,50	11,42	11,43	11,41	11,40	11,53	11,81
$T_{ср}$, с	1,152	1,150	1,142	1,143	1,141	1,140	1,153	1,181

?

Изучение св-в момента инерции тонкого стержня.

Таблица 3.

№	1	2	3	4	5	6	7	8
T, с	1,152	1,150	1,142	1,143	1,141	1,140	1,153	1,181
x, м	0,07	0,08	0,09	0,10	0,11	0,12	0,15	0,17
b, м	0,20	0,19	0,18	0,17	0,16	0,15	0,12	0,10
Y, м²	0,007	0,006	0,006	0,006	0,005	0,005	0,004	0,004
Θ_Y, м²	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00002	0,00003	0,00002	0,00003

Б. Примеры вычислений.

• Математический маятник. Определение свободного падения по формуле (1):

$$T_1 = \frac{t_1}{10} = \frac{12,62\,с}{10} = 1,262\,с$$

$$g_1 = \frac{4\pi^2 \cdot 0,40\,м}{1,262^2\,с} = 9,905 \approx 9,9\,м/с^2.$$

$$T_5 = \frac{t_5}{10} = \frac{8,81\,с}{10} = 0,881\,с$$

$$g_5 = \frac{4\pi^2 \cdot 0,20\,м}{0,881\,с^2} = 10,162 \approx 10,2\,м/с^2$$

$$g_{ср} = \frac{9,9+10,0+10,1+9,9+10,2}{5} = 10,02\,м/с^2$$

• Физический маятник. Определение свободного падения по формуле (2):

Определяем средний период колебаний:

$$T_{1ср} = \frac{1,153+1,152+1,152}{3} = 1,152\,с$$

Находим T_{min} (минимум среднего периода колеб.):

$T_{min} = 1,140\,с$.

и по формуле (2) определяем ускорение св. пад.:

$$g = \frac{4\pi^2 \cdot 0{,}54м}{1{,}140с^2 \cdot \sqrt{3}} = 9{,}461\ м/с^2.$$

По формуле (3) находим Y:

$$b1 = \frac{l}{2} - x1 = \frac{0{,}54м}{2} - 0{,}07м = 0{,}20м.$$

$$Y_1 = \frac{1{,}152^2с \cdot b1}{4\pi^2} = 0{,}007\ м^2$$

$$b8 = \frac{l}{2} - x8 = \frac{0{,}54м}{2} - 0{,}17м = 0{,}10м$$

$$Y_8 = \frac{1{,}181с^2 \cdot b8}{4\pi^2} = 0{,}004\ м^2$$

6. Вычисление погрешностей.

Систематические погрешности.

1) $$\Theta_g = \left|\frac{\partial g}{\partial l}\right|\Theta_l + \left|\frac{\partial g}{\partial T}\right|\Theta_T = g\left(\frac{\Theta_l}{l} + 2\frac{\Theta_T}{T}\right) = \qquad (4)$$

$$= 9{,}9\left(\frac{0{,}005}{0{,}40} + \frac{0{,}001 \cdot 2}{1{,}262}\right) \approx 0{,}140 м/с^2$$

$\Theta_l = 0{,}5см = 0{,}005м$; $\Theta_T = 0{,}001с$

$g = (9{,}9 \pm 0{,}14)\ м/с^2$

2) $$\Theta_g = 9{,}461\left(\frac{0{,}0005}{0{,}54} + 2\frac{0{,}001}{1{,}140}\right) \approx 0{,}025\ м/с^2$$

$\Theta_l = 0{,}5мм = 0{,}0005м$; $\Theta_T = 0{,}001с$

$g = (9{,}461)\ м/с^2$, погрешность измерений получилась настолько малой, что её можно не учитывать

3) $$\Theta_{Y1} = 0{,}007\left(2 \cdot \frac{0{,}001}{1{,}152} + \frac{0{,}0005}{0{,}20}\right) = 0{,}00003$$

$$\Theta_Y = Y\left(2\frac{\Theta_T}{T} + \frac{\Theta_b}{b}\right) \qquad (5)$$

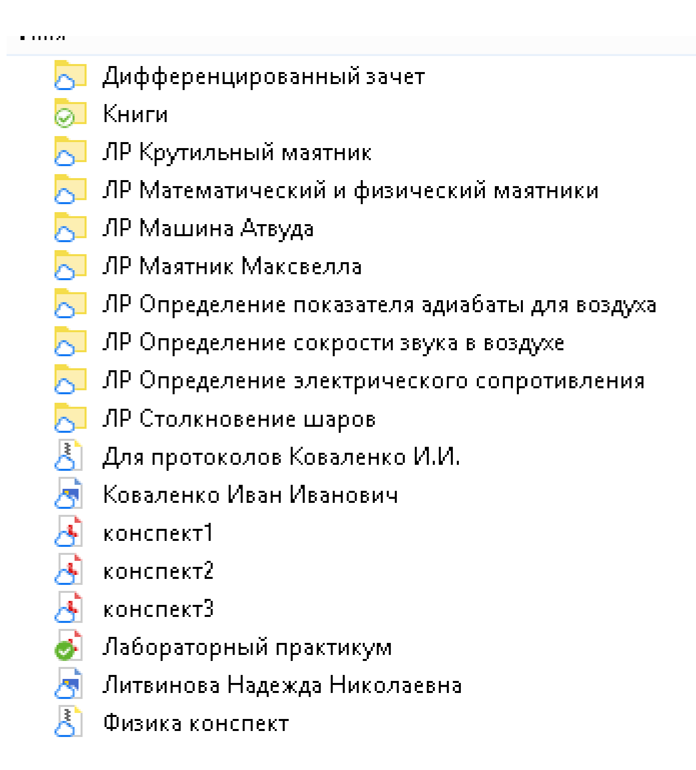
7. Вывод

Ознакомилась с методикой измерения ускорения свободного падения.

При измерениях математическим маятником ускорение свободного падения равно $g=(9,9\pm 0,140)$ м/с² с вероятностью 98%. Данные расчеты показывают, что с учётом систематической погрешности число не точное, что говорит нам о неточности измерений, связанные с человеческим фактором при измерении на лабораторной установке.

$g \simeq (9,461 \pm 0,025)$ м/с² – ускорение св. падения, измеренна физическим маятником.





СКАЧАТЬ https://yadi.sk/d/RqO8HPxTfh0z_w
СКАЧАТЬ https://archive.org/details/@guap4736_vkclub152685050



Лабораторная работа № 4

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИКИ

Цель работы: определение ускорения свободного падения, исследование момента инерции тонкого стержня.

Теоретические сведения

Физическим маятником называется абсолютно твердое тело, закрепленное на неподвижной горизонтальной оси. Плоскость, проходящая через эту ось и центр тяжести вертикальна в положении равновесия. При отклонении маятника от этого положения возникают моменты сил, стремящиеся вернуть маятник в положение равновесия.

По основному уравнению динамики вращательного движения абсолютно твердого тела сумма моментов всех сил, приложенных к телу

$$\sum_i \vec{M}_i = I\vec{\varepsilon}. \qquad (4.1)$$

В этой формуле I – момент инерции маятника относительно оси подвеса, $\vec{\varepsilon}$ – его угловое ускорение, а $\sum \vec{M}_i$ – сумма моментов всех сил, к этому маятнику приложенных.

На рис. 4.1 изображен физический маятник. Ось вращения отмечена буквой O, центр тяжести буквой C. Обозначим $\overrightarrow{OC} = \vec{b}$. К точке C приложены две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции $\vec{N}$.

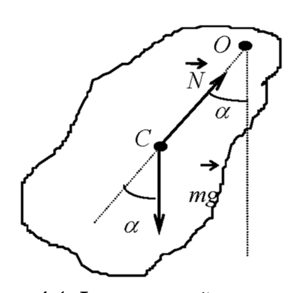


Рис. 4.1.Физический маятник

Поскольку сила $\vec{N}$ направлена вдоль отрезка $[OC]$, ее момент относительно оси O равен нулю, а сумма моментов этих сил

$$\overrightarrow{OC} \times m\vec{g} + \overrightarrow{OC} \times \vec{N} = \overrightarrow{OC} \times m\vec{g} = \vec{b} \times m\vec{g}.$$

Подставим результат в (4.1) и получим

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{b} \times m\vec{g}.$$

Спроектируем полученное выражение на направление оси вращения.

$$I\varepsilon = -mgb \cdot \sin\alpha.$$

Знак минус показывает, что момент силы тяжести стремится вернуть маятник в положение равновесия. Ограничимся рассмотрением лишь малых колебаний, для которых $\sin\alpha = \alpha$, и учтем, что угловое ускорение есть вторая производная от угла отклонения по времени $\varepsilon = \alpha''(t)$,

$$\alpha''(t) + \frac{mgb}{I} \cdot \alpha(t) = 0. \qquad (4.2)$$

Получившееся уравнение аналогично дифференциальному уравнению гармонических колебаний пружинного маятника

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0. \qquad (4.3)$$

с циклической частотой $\omega = \sqrt{\frac{mgb}{I}}$. (4.4)

Следовательно, при малых углах отклонения от положения равновесия физический маятник совершает гармонические колебания

$$\alpha(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0), \qquad (4.5)$$

период которых зависит от момента инерции маятника относительно оси O, его массы и от расстояния между центром тяжести и этой осью:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgb}}. \qquad (4.6)$$

Уравнение (4.5) содержит две константы: амплитуду A и начальную фазу φ_o, значения которых определяются из начальных условий. Если секундомер включить в момент прохождения маятником положения равновесия, то $\varphi_0 = -90°$ и уравнение (4.5) перепишется в виде:

$$\alpha(t) = A\sin(\omega t). \qquad (4.7)$$

В случае, когда физический маятник, совершающий малые колебания, представляет собой небольшое тело, подвешенное на легкой

длинной нерастяжимой нити, его можно считать математическим маятником. *Математическим маятником* называется материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити, совершающая под действием силы тяжести малые колебания. Такие колебания являются гармоническими и описываются функциями (4.5) или (4.7).

Момент инерции математического маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса, равен $I = ml^2$, где l – длина нити. Подставляя это выражение в (4.4) и (4.6), найдем циклическую частоту и период колебаний математического маятника.

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}, \tag{4.8}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}. \tag{4.9}$$

Таким образом, частота и период колебаний математического маятника зависят от его длины и ускорения свободного падения. От массы маятника они не зависят.

Сравнивая друг с другом формулы (4.6) и (4.9), замечаем, что математический маятник с длиной нити

$$L = \frac{I}{mb}. \tag{4.10}$$

будет иметь такой же период колебаний, что и физический маятник. Величина, определяемая выражением (4.10), называется *приведенной длиной физического маятника*.

Рассмотрим физический маятник – тонкий длинный стержень. Найдём его момент инерции. Момент инерции любого твёрдого тела определяется относительно оси, вокруг которой происходит вращение или такое вращение гипотетически допустимо. Момент инерции материальной точки относительно оси, находящейся на расстоянии r от неё :

$$I = mr^2. \tag{4.11}$$

Направим вдоль стержня ось ox, начало координат поместим в середине. Выделим короткий участок стержня длиной dx в точке с координатой x (рис. 4.2).

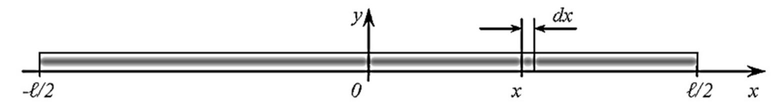


Рис. 4.2. К выводу момента инерции тонкого стержня

Масса стержня m, его длина ℓ. Момент инерции выделенного фрагмента стержня с массой dm:

$$dI = dmx^2.$$

Массу выделенного фрагмента dm можно найти из пропорции:

$$\frac{dm}{m} = \frac{dx}{\ell}; \qquad \Rightarrow \qquad dm = \frac{m}{\ell}dx.$$

Таким образом, для момента инерции фрагмента стержня имеем

$$dI = \frac{mx^2dx}{\ell}.$$

Момент инерции всего стержня I_o можно найти, проинтегрировав это выражение по всей длине от $-\ell/2$ до $\ell/2$.

$$I_0 = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{mx^2dx}{\ell} = \frac{m}{\ell}\cdot\int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2dx = \frac{mx^3}{3\ell}\Bigg|_{-\ell/2}^{\ell/2} = \frac{m}{3\ell}\cdot\frac{\ell^3}{8} + \frac{m}{3\ell}\cdot\frac{\ell^3}{8} = \frac{m\ell^2}{12}.$$

Мы получили момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его середину, который в дальнейшем будем называть I_o.

$$I_0 = \frac{m\ell^2}{12} \tag{4.12}$$

Во всех формулах, использованных раньше, рассматривался момент инерции стержня относительно оси подвеса, не проходящей через центр тяжести. Эти величины связаны друг с другом теоремой Штейнера $I = I_0 + mb^2$.

$$I = \frac{m\ell^2}{12} + mb^2, \tag{4.13}$$

где b – расстояние между центром тяжести и осью. Если ось проходит через край стержня, т.е. $b = \ell/2$, то момент инерции относительно нее

$$I_\ell = \frac{m\ell^2}{12} + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{m\ell^2}{12} + \frac{m\ell^2}{4} = \frac{m\ell^2}{3},\ \text{т. е.}$$

$$I_\ell = \frac{m\ell^2}{3}. \tag{4.14}$$

Отметим, что формулы (4.12) и (4.14) являются частными случаями формулы (4.13) при $b = 0$ и при $b = \ell/2$. Вернёмся к общему случаю: подставим (4.13) в (4.6), преобразуем и получим

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{m\ell^2}{12} + mb^2}{mgb}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{\ell^2}{12} + b^2}{gb}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell^2 + 12b^2}{12gb}}. \tag{4.15}$$

На рис. 4.3 приведён график получившейся зависимости. Видно, что у неё есть минимум при b 15 –18 см. Проведём анализ функции $T(b)$, найдём минимальное значение периода T и соответствующую координату b.

$$T'(b) = \frac{\left(\frac{\ell^2 + 12b^2}{12gb}\right)'_b}{4\pi\sqrt{\frac{\ell^2 + 12b^2}{12gb}}} = \frac{\frac{24b12gb - 12g\left(\ell^2 + 12b^2\right)}{(12gb)^2}}{4\pi\sqrt{\frac{\ell^2 + 12b^2}{12gb}}} = \frac{12b^2 - \ell^2}{48gb^2\pi\sqrt{\frac{\ell^2 + 12b^2}{12gb}}}.$$

Приравняем производную нулю: $T'(b) = 0;\ \Rightarrow\ 12b^2 = \ell^2;$ $\Rightarrow\ b = \ell\big/\sqrt{12}$. Подставим получившееся значение b в формулу (4.15) и после вычислений получим минимальный период колебаний тонкого стержня.

$$T_{\min} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\sqrt{3}g}}. \tag{4.16}$$

В написанной формуле ℓ – длина всего стержня, которая может быть без труда измерена, причём очень точно. Период колебаний измеряется тоже весьма точно.

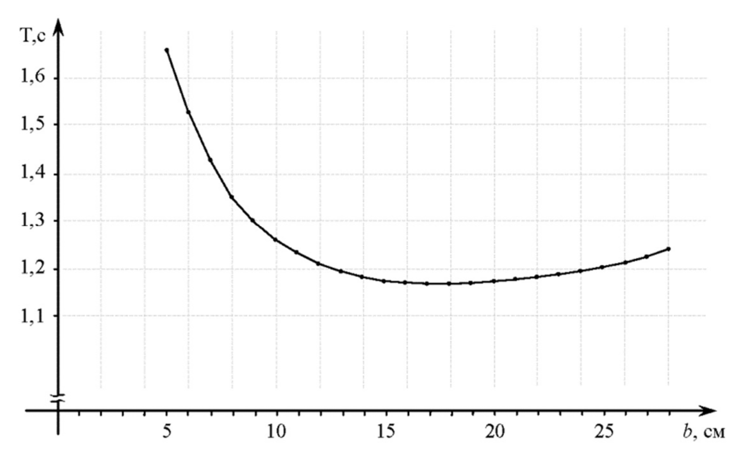


Рис. 4.3. График зависимости периода колебаний от параметра b

Для измерения ускорения свободного падения нужно измерить периоды колебаний физического маятника относительно нескольких осей, найти минимум, и по соответствующему периоду $T_{\min}$ и по длине всего стержня ℓ найти g по формуле

$$g = \frac{4\pi^2 \ell}{T^2\sqrt{3}}. \qquad (4.17)$$

Снова вернёмся к уравнению (4.15) и перепишем его в виде

$$\frac{T^2 b}{4\pi^2} = \frac{\ell^2}{12g} + \frac{b^2}{g}. \qquad (4.18)$$

Введём обозначения:

$$Y = \frac{T^2 b}{4\pi^2}, \quad Y_0 = \frac{\ell^2}{12g}, \quad k = \frac{1}{g}, \quad z = b^2 \qquad (4.19)$$

и получим функцию $Y(z)$ (рис. 4.4):

$$Y = Y_0 + k \cdot z. \qquad (4.20)$$

Физический смысл величин: $Y = I/m$ – момент инерции тела, делённый на его массу; $Y_o = I_o/m$ – момент инерции тела относительно центра тяжести стержня, делённый на его массу.

Угловой коэффициент этой функции $k = 1/g$. Значения этой функции Y и её аргумента z могут быть вычислены по измеренным значениям T и b. Функция (4.20) – это другая форма записи функции (4.13).

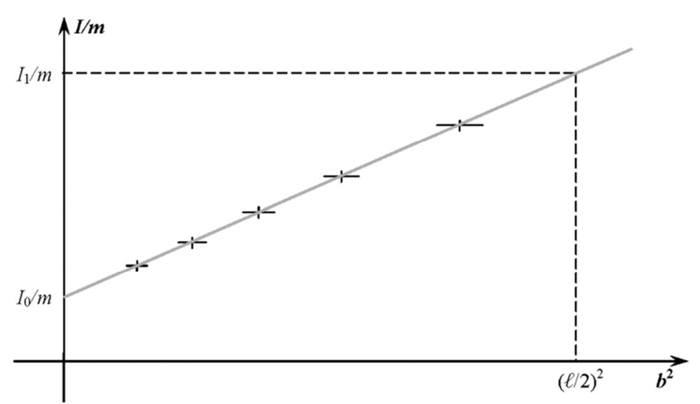


Рис. 4.4. Зависимость приведенного момента инерции от положения оси маятника

Лабораторная установка

Внешний вид установки приведен на рис. 4.5. Установка состоит из математического и физического маятников. Математический маятник выполнен в виде металлического шарика 1 на бифилярном подвесе 2. Длина подвеса измеряется линейкой на стойке 3.

Физический маятник есть металлический стержень 4, на котором крепится подвижная ось – опорная призма 5. Фотодатчик 6 на нижнем кронштейне сигнализирует о прохождении маятником положения равновесия. Время измеряется миллисекундомером, а число колебаний специальным счетчиком. Прибор включается нажатием кнопки “Сеть”. Кнопка “Сброс” служит для установки нуля. Нажатие кнопки “Стоп” выключает прибор после окончания текущего колебания. Для упрощения измерения расстояния на стержне через каждый сантиметр нанесены риски. Кроме того, на установке имеется специальная измерительная линейка.

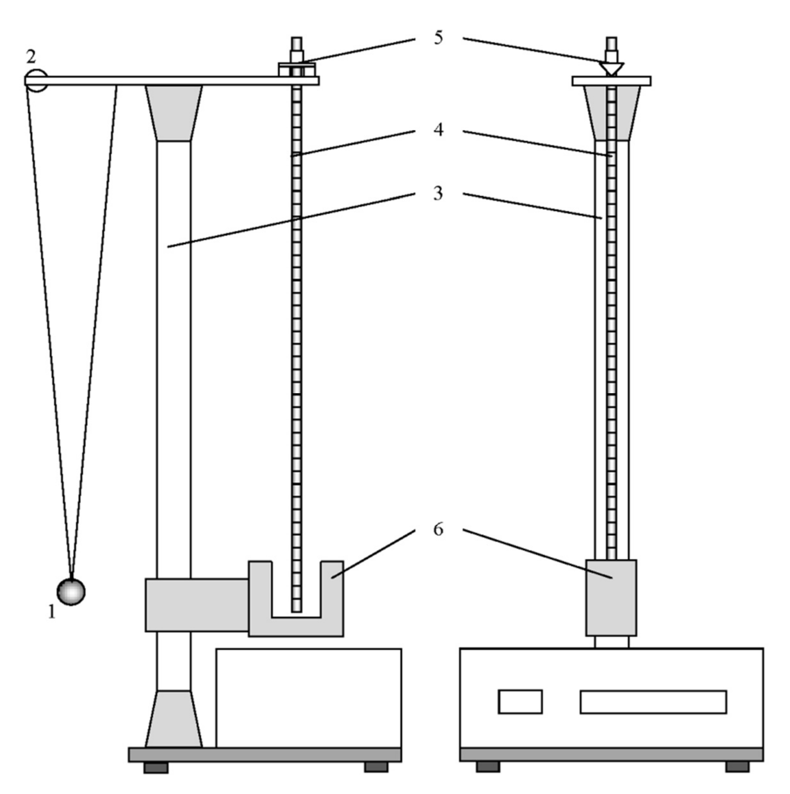


Рис. 4.5. Внешний вид лабораторной установки

Задания и порядок их выполнения

Задание 1. Определение ускорения свободного падения при помощи математического маятника.

Верхнюю планку следует развернуть так, чтобы математический маятник оказался над фотодатчиком, таким образом, чтобы в положении равновесия он пересекал оптическую ось.

Перед началом измерений нажимают кнопку "Сброс". Шарик отклоняют на небольшой угол ~4–5° и осторожно без толчка отпускают. Когда на счетчике колебаний появляется цифра 9, нажимают кнопку "Стоп". В таком случае прибор измерит время 10 полных колебаний, и найти их средний период будет очень просто.

Определение периода колебаний проводится таким методом не менее 5 раз при различных длинах маятника ℓ. Для каждого значения периода и соответствующей длины при помощи формулы (4.9), переписанной в явном виде:

$$g = \frac{4\pi^2 \ell}{T^2},$$

находится ускорение свободного падения. Необходимо провести стандартную математическую обработку результатов измерения g, считая все вычисленные значения случайными величинами. При определении систематической погрешности считать θ_ℓ = 0,5 см, $\theta_T = 0{,}001$ с.

Задание 2. Определение ускорения свободного падения при помощи физического маятника.

Верхнюю планку повернуть так, чтобы нижняя часть оси физического маятника проходила через прорезь фотодатчика. Отклонить маятник на небольшой угол ~ 4–5° и осторожно без толчка отпустить его. Нажать кнопку "Сброс"; включится секундомер и счетчик колебаний. Когда на счетчике колебаний появится цифра 9, нажать кнопку "Стоп". В таком случае прибор измерит время 10 полных колебаний и найти их средний период $T_о$ будет очень просто.

Измерения провести для шести положений оси на расстояниях 10–15 см от края стержня по три раза в каждом положении. Во время измерений заполнять табл. 4.1.

Таблица 4.1

x, см	10	11	12	13	14	15
T_1, с						
T_2, с						
T_3, с						
$T_{ср}$, с						

Анализируя данные таблицы нужно найти минимум среднего периода колебаний и по формуле (4.17) определить ускорение свободного падения.

Необходимо провести стандартную математическую обработку результатов измерения g, считая данные каждого столбца случайными величинами T_1, T_2, T_3. При определении систематической погрешности считать $\theta_\ell = 0{,}5$ мм, $\theta_T = 0{,}001$ с.

Задание 3. Изучение свойств момента инерции тонкого стержня.

Необходимо получить серию из 6–8 измерений $T(b)$, где b – расстояние между центром масс тела и осью подвеса (рис. 4.6).

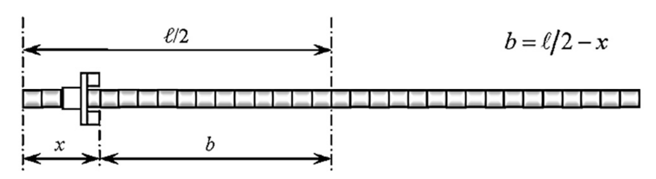


Рис. 4.6. Положение оси подвеса маятника

Значения b нужно менять во всём диапазоне значений – от b_{min} = = 2 см до b_{max} = 27 см. Результаты измерений и вычислений следует оформить в виде табл. 4.2. Обрабатывать следует результаты, полученные во второй и в третьей частях работы.

Величину Y следует вычислять по формуле (4.19).

Формулу для вычисления систематической погрешности θ_Y нужно получить самостоятельно.

При вычислениях погрешности использовать $\theta_b = 0{,}5$ мм, $\theta_T = 0{,}001$ с.

Таблица 4.2

№	1	2	3	4	5	6 ...
T, с						
x, м						
b, м						
Y, м^2						
θ_Y, м^2						

Измеренные и вычисленные результаты из табл. 4.2 нужно отложить на графике, как на рис. 4.2. Через получившиеся точки (крестики) на графике нужно провести прямую линию. Эта линия должна быть экстраполирована, т.е. продолжена до значений $z = 0$ и $z = (\ell/2)^2$.

Анализируя построенный график нужно убедиться в следующем:

получившаяся зависимость линейна;

$I_1/I_0 = 4$.

Контрольные вопросы

1. Какие тела называются математическим и физическим маятниками?
2. Напишите дифференциальные уравнения колебаний физического и пружинного маятников, а также их решения.
3. Каким образом по начальному отклонению и начальной скорости маятника найти амплитуду и начальную фазу колебаний?
4. Напишите формулы для периодов и частот колебаний пружинного, физического и математического маятников.
5. В чем состоит содержание теоремы Штейнера?
6. Что называется приведенной длиной физического маятника?
7. Почему значение g во втором задании находится без использования величины b?
8. Почему I_1 должен быть в четыре раза больше, чем I_0?